

Campi di applicazione

I filtri nel settore dell'elettronica sono utilizzati per :

- ❑ attenuare i disturbi, il rumore e le distorsioni applicati al segnale utile;
- ❑ separare due segnale trasmessi sullo stesso canale;
- ❑ elaborazione dei segnali nella riproduzione audio e video;
- ❑ ricostruzione di segnali ottenuti con tecniche digitali, ecc.

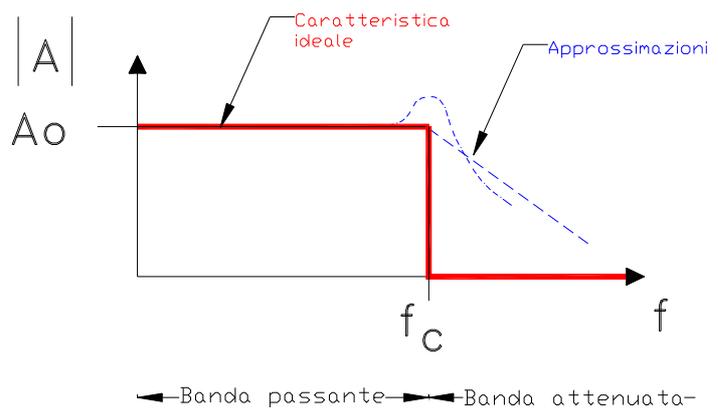
Concetti generali

I quadripoli filtranti sono fondamentalmente di 4 tipi:

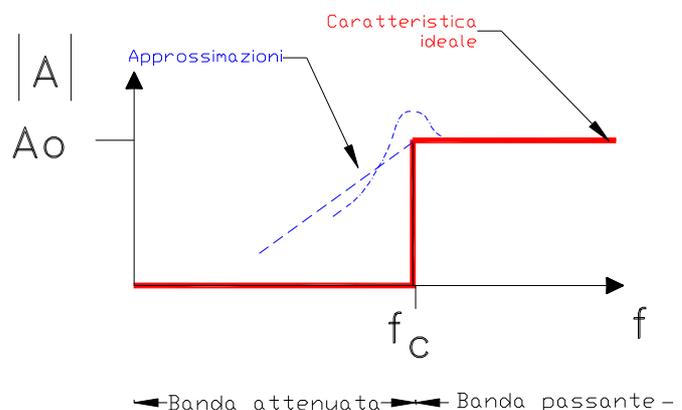
1. passa-basso (low -pass)
2. passa-alto (high-pass)
3. passa-banda (band-pass)
4. elimina-banda (band-reject o notch)

1_ Filtro passa-basso

Con $A(j\omega)$ si indica la funzione di trasferimento del filtro, il cui modulo $|A|$ assume un valore costante A_0 da $f=0$ fino ad una frequenza f_c , detta **frequenza di taglio**, (quest'intervallo assume il nome di banda passante (passband)), mentre per valori di frequenza superiori a f_c , $|A|=0$ trovandoci in banda attenuata.

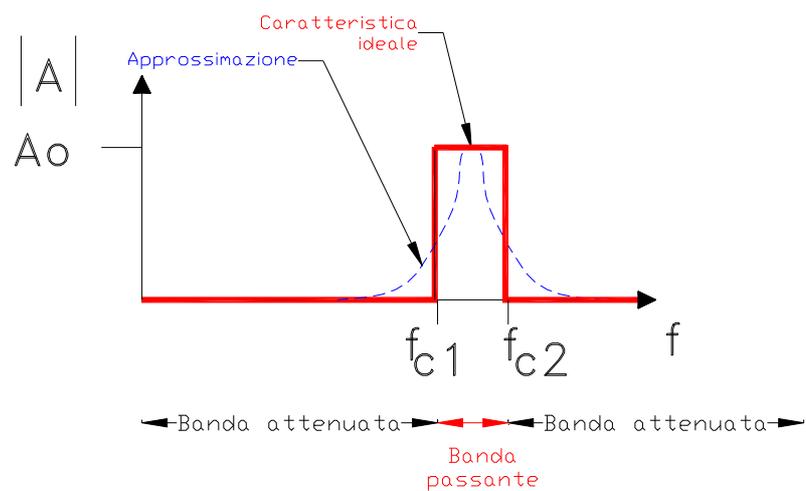
**2_ Filtro passa-alto**

il cui modulo $|A|$ assume un valore nullo da $f=0$ fino ad una frequenza f_c , detta **frequenza di taglio**, (quest'intervallo assume il nome di banda attenuata (stopband)), mentre per valori di frequenza superiori a f_c , $|A|=A_0$ trovandoci in banda passante.



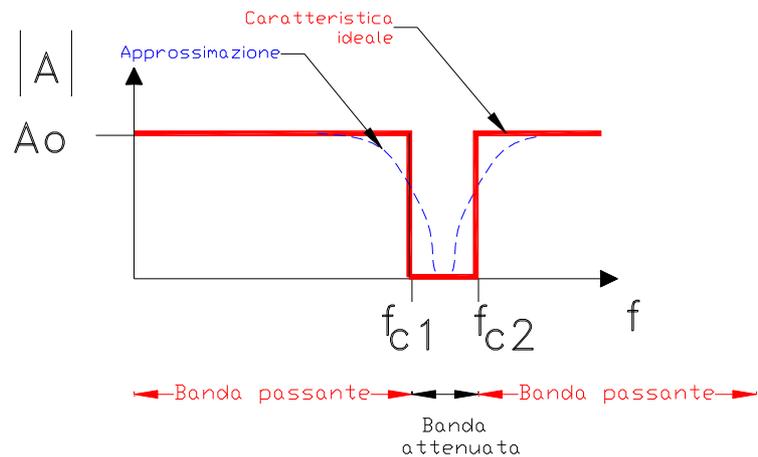
3_ Filtro passa-banda

Trasmette soltanto una gamma di frequenze delimitata dalle due frequenze di taglio f_{c1} e f_{c2} , (quest'intervallo assume il nome di banda passante), mentre per valori di frequenza superiori a f_{c2} ed inferiori a f_{c1} si è in banda attenuata.



4_ Filtro elimina-banda

attenua una gamma di frequenze delimitata dalle due frequenze di taglio f_{c1} e f_{c2} , (quest'intervallo assume il nome di banda attenuata), mentre per valori di frequenza superiori a f_{c2} ed inferiori a f_{c1} si è in banda passante.



I filtri passivi

Sono costituiti da reti più o meno complesse di elementi passivi, R-L-C, ma sono caratterizzate da una risposta ben lontana dalle curve ideali, oltre che la risposta dipende fortemente dal carico applicato.

Filtri passivi con buone caratteristiche di selettività sono realizzati con reti comprendenti solo elementi reattivi (L e C).

I filtri attivi

I filtri attivi sono realizzati con A.O. e reti di reazione RC, presentando parecchi vantaggi rispetto ai filtri passivi, come il basso costo, la semplicità di progetto e circuitale, ingombro e prestazioni. Il limite principale consiste nel fatto di disporre di un'alimentazione in continua.

Funzione di trasferimento dei filtri reali

La curva di risposta ideale non può essere realizzata ma solo approssimata.

Ad una curva approssimata si può far corrispondere una funzione di trasferimento (f.d.t.) razionale fratta, dove il numero dei poli determina l'ordina del filtro.

Esempio: la f.d.t. razionale fratta di un filtro passa-basso del quinto ordine è esprimibile come:

$$A(s) = \frac{k}{(s^2 + b_1 \cdot s + c_1) \cdot (s^2 + b_2 \cdot s + c_2) \cdot (s + c_3)} = \frac{k_1}{(s^2 + b_1 \cdot s + c_1)} \cdot \frac{k_2}{(s^2 + b_2 \cdot s + c_2)} \cdot \frac{k_3}{(s + c_3)}$$

la f.d.t. di ordine 5 è stata scomposta come prodotto di 2 f.d.t. di ordine 2 e una di ordine 1, pertanto un filtro di ordine superiore all'ordine 2 si può realizzare disponendo in cascata un certo numero di filtri di ordine 2, da qui si evidenzia l'importanza dei filtri del secondo ordine.

Qui di seguito sono riportate le f.d.t. relative ad ogni tipo di filtro, dove:

- $\omega_0 = 2\pi f_0$ è la pulsazione di oscillazione;
- $Q = 1/2\xi$ è il coefficiente di risonanza;
- ξ è il coefficiente di smorzamento.

Ordine n.	Tipo	Funzione di trasferimento A(s)
1	Passa-basso	$\frac{A_0}{\frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 \cdot \omega_0}{s + \omega_0}$
	Passa-alto	$\frac{A_0 \cdot \frac{s}{\omega_0}}{\frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 \cdot s}{s + \omega_0}$
2	Passa-basso	$\frac{A_0}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2 \cdot \xi \cdot \frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{A_0 \cdot \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$
	Passa-alto	$\frac{A_0 \cdot \frac{s^2}{\omega_0^2}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2 \cdot \xi \cdot \frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 \cdot s^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{A_0 \cdot s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$
	Passa-banda	$\frac{A_0 \cdot 2\xi \cdot \frac{s}{\omega_0}}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2 \cdot \xi \cdot \frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 \cdot 2\xi \cdot \omega_0 s}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{A_0 \cdot \frac{\omega_0}{Q} s}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$
	Elimina-banda	$\frac{A_0 \cdot \left(\frac{s^2}{\omega_0^2} + 1\right)}{\frac{s^2}{\omega_0^2} + 2 \cdot \xi \cdot \frac{s}{\omega_0} + 1} = \frac{A_0 \cdot (s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2} = \frac{A_0 \cdot (s^2 + \omega_0^2)}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$

Tecniche di approssimazioni

Le diverse tecniche di approssimazione differiscono tra loro per la scelta dei valori di ξ e di ω_0 presenti a denominatore delle f.d.t. a seconda dei casi è possibile privilegiare, in sede di progetto, specifici requisiti come ad esempio la piatezza della risposta in banda passante, la rigidità nell'intorno della frequenza di taglio (*roll-off iniziale*), la qualità della risposta al transitorio, ecc. i poli sono comunque complessi coniugati ($\xi < 1$).

Saranno esaminate:

1. Approssimazione di Butterworth
2. Approssimazione di Chebyshev
3. Approssimazione di Bessel

Approssimazione di Butterworth

Garantisce la massima piatezza della risposta in banda passante, con *roll-off iniziale* discretamente elevato. I polinomi di grado n presenti a denominatore della f.d.t. vengono detti polinomi di Butterworth e sono qui appresso elencati, avendo assunto $\omega_0=1 \text{ rad/s}$

n	Polinomi di Butterworth
1	$s+1$
2	$s^2+1.414s+1$
3	$(s^2+s+1)(s+1)$
4	$(s^2+0.765s+1)(s^2+1.848s+1)$
5	$(s^2+0.618s+1)(s^2+1.618s+1)(s+1)$
6	$(s^2+0.518s+1)(s^2+1.414s+1)(s^2+1.932s+1)$
7	$(s^2+0.445s+1)(s^2+1.247s+1)(s^2+1.802s+1)(s+1)$

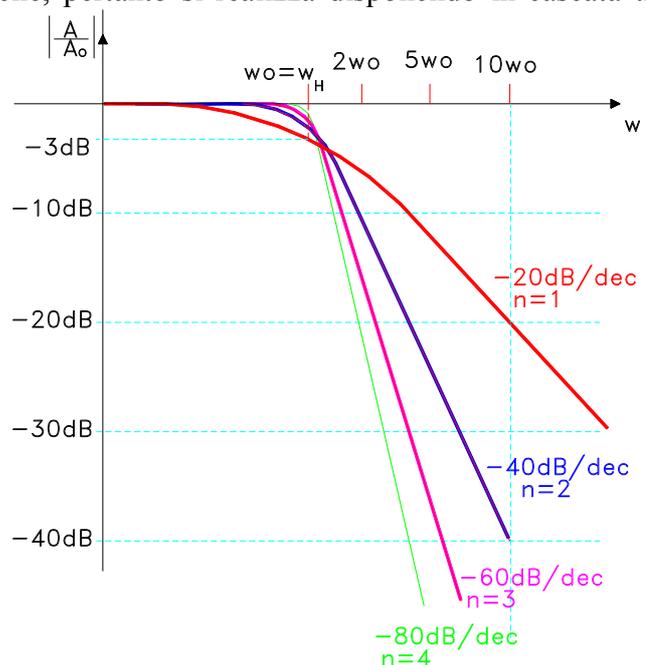
Esempio: Determinare come può essere strutturato un filtro **passa-basso del 6° ordine**, con pulsazione di taglio $\omega_H=1000 \text{ rad/sec}$, secondo la tecnica di approssimazione di Butterworth.

Soluzione: la f.d.t. non ha zeri e presenta a denominatore un polinomio di 6° grado (n=6), scomponibile nel prodotto di 3 forme quadratiche, pertanto si realizza disponendo in cascata tre celle filtranti LP (Low-pass) del 2° ordine. Per ciascuna cella si assume $\omega_0 = \omega_H = 1000 \text{ rad/s}$ mentre diversi sono i valori di ξ forniti dai polinomi di Butterworth di ordine 6°, pertanto si trova:

$$\xi_1 = \frac{0.518}{2} = 0.259$$

$$\xi_2 = \frac{1.414}{2} = 0.707$$

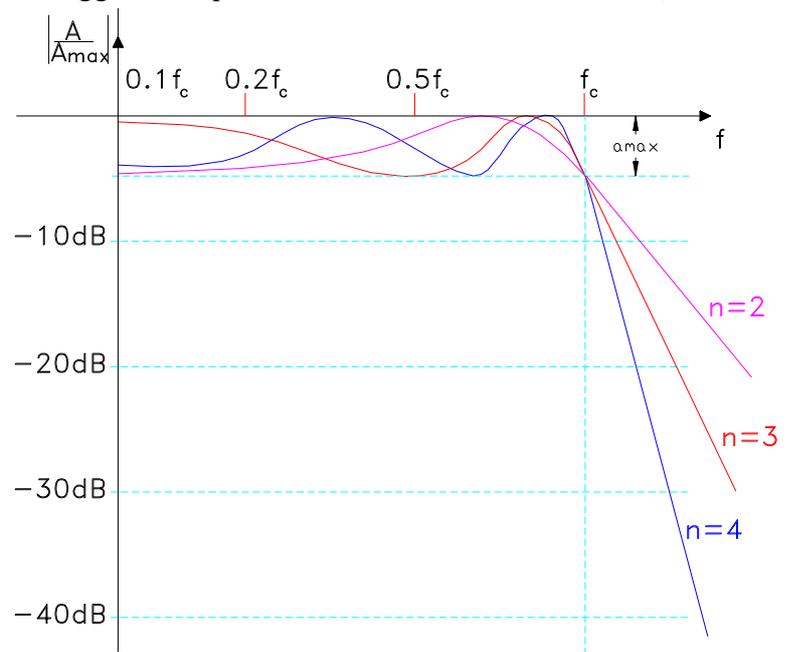
$$\xi_3 = \frac{1.932}{2} = 0.966$$



Approssimazione di Chebyshev

Garantisce un *roll-off iniziale* elevato maggiore di quello fornito dai filtri Butterworth, ossia una notevole attenuazione, già poco oltre la frequenza di frontiera, ma a discapito della piattezza della risposta in banda passante dove la curva presenta un'ondulazione (*ripple*).

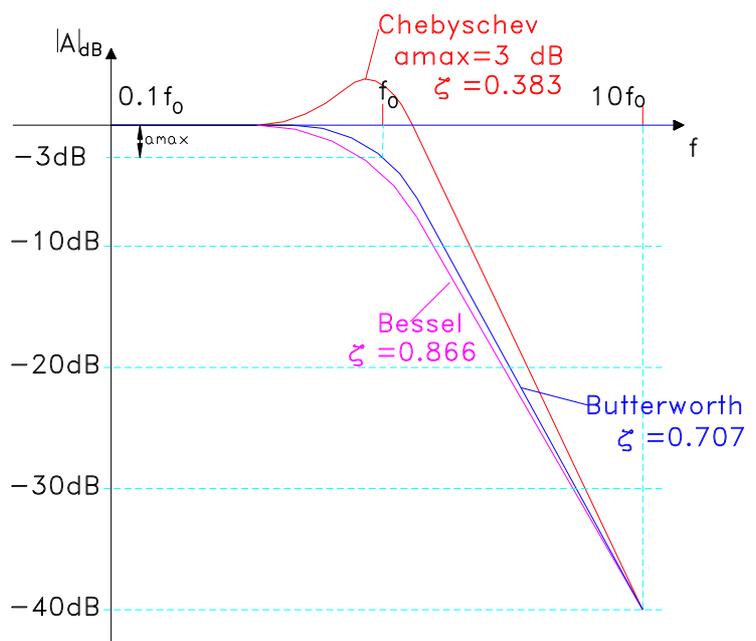
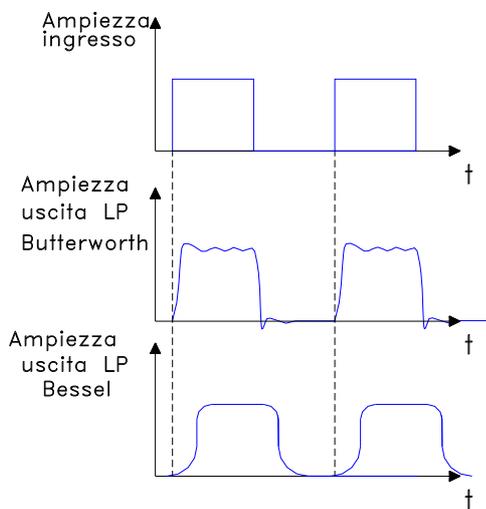
I dati del progetto sono l'ampiezza massima del ripple a_{max} mai maggiore di 3dB, e la frequenza di frontiera f_c , detta anche *lunghezza del canale del ripple*, vale a dire il valore di frequenza oltre la quale la curva di risposta scende al di sotto del limite di guadagno fissato in banda passante.



Approssimazione di Bessel

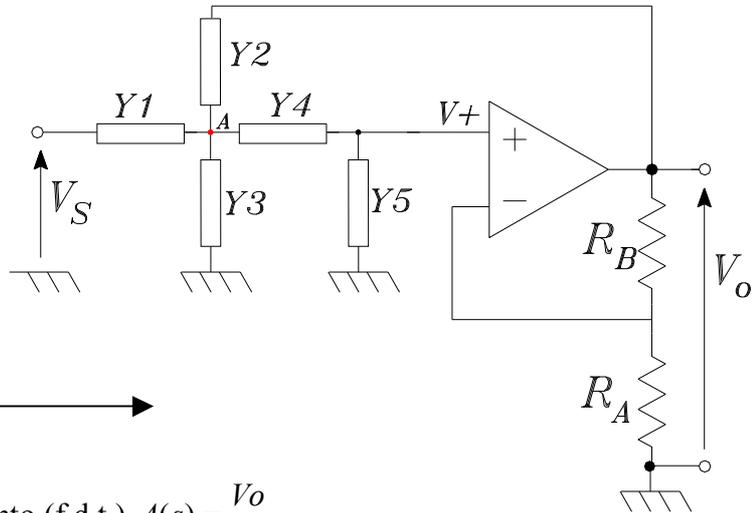
Mira in primo luogo a conseguire una buona linearità della curva di fase in banda passante. Ciò equivale ad avere un ritardo di fase o tempo di ritardo t_{ph} costante per tutte le frequenze, pertanto il filtro di Bessel funge da linea di ritardo.

Per valori elevati di ζ delle forme quadratiche ($\zeta = \sqrt{3/2} = 0.866$ per un filtro del secondo ordine) la risposta al gradino non ha carattere oscillatorio.



Filtri a reazione semplice di Sallen-Key

È una struttura circuitale adatta a realizzare celle filtranti del secondo ordine di tipo passa-basso passa-alto e passa-banda, i quali oltre a prendere il nome di filtri a reazione **positiva** semplice si chiamano pure **VCVS (Voltage-Controlled Voltage Source)**.



Struttura generale di un filtro VCVS

Ricaviamone la funzione di trasferimento (f.d.t.) $A(s) = \frac{V_o}{V_s}$

Dall'equazione al nodo **A**, si ricava:

$$(V_s - V_A) \cdot Y_1 + (V_o - V_A) \cdot Y_2 - V_A \cdot Y_3 - V_A \cdot \frac{Y_4 \cdot Y_5}{Y_4 + Y_5} = 0$$

da cui eseguendo i prodotti e raccogliendo a fattor comune, si ottiene:

$$V_s \cdot Y_1 - V_A \cdot \left(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \frac{Y_4 \cdot Y_5}{Y_4 + Y_5} \right) + V_o \cdot Y_2 = 0 \quad [1]$$

Per l'amplificatore non invertente vale la relazione: $\frac{V_o}{V_+} = \left(1 + \frac{R_B}{R_A} \right) = K$ da cui ricavo $V_o = K \cdot V_+$

Per la parte di rete che va dal nodo A al morsetto non invertente dell'A.O. vale la relazione seguente: $V_+ = V_A \cdot \frac{Y_4}{Y_4 + Y_5}$ da cui ricavo $V_A = V_+ \cdot \frac{Y_4 + Y_5}{Y_4}$ ed alla quale sostituisco il V_+

precedentemente trovato, ottenendo: $V_A = \frac{V_o}{K} \cdot \frac{Y_4 + Y_5}{Y_4}$

sostituendo V_A nell'equazione [1], ottengo:

$$V_s \cdot Y_1 - \frac{V_o}{K} \cdot \frac{Y_5 + Y_4}{Y_4} \left(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \frac{Y_4 \cdot Y_5}{Y_4 + Y_5} \right) + V_o \cdot Y_2 = 0$$

raccolgo a fattor comune V_o , e portandolo a secondo membro, ottengo:

$$V_s \cdot Y_1 = V_o \cdot \left[\frac{Y_5 + Y_4}{K \cdot Y_4} \left(Y_1 + Y_2 + Y_3 + \frac{Y_4 \cdot Y_5}{Y_4 + Y_5} \right) - Y_2 \right]$$

FILTRI ATTIVI 26_01_03

minimo comune multiplo, all'interno della parentesi tonda, $Y_4 + Y_5$

$$V_S \cdot Y_1 = V_0 \cdot \left[\frac{(Y_5 + Y_4)}{K \cdot Y_4} \left(\frac{(Y_1 + Y_2 + Y_3) \cdot (Y_4 + Y_5) + Y_4 \cdot Y_5}{(Y_4 + Y_5)} \right) - Y_2 \right]$$

minimo comune multiplo, all'interno della parentesi quadre è, $K \cdot Y_4$

$$V_S \cdot Y_1 = V_0 \cdot \left[\frac{(Y_1 + Y_2 + Y_3) \cdot (Y_4 + Y_5) + Y_4 \cdot Y_5 - (K \cdot Y_4) \cdot Y_2}{K \cdot Y_4} \right]$$

mi ricavo il rapporto cercato $A(s) = \frac{V_0}{V_S}$

$$\left[\frac{Y_1}{(Y_1 + Y_2 + Y_3) \cdot (Y_4 + Y_5) + Y_4 \cdot Y_5 - (K \cdot Y_4) \cdot Y_2} \right] = \frac{V_0}{V_S}$$

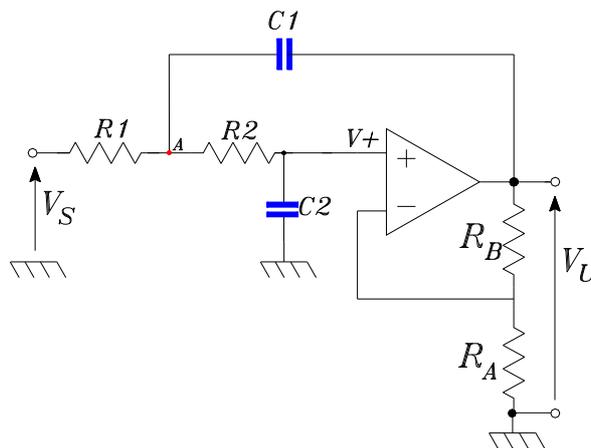
eseguendo le moltiplicazioni, portando $K \cdot Y_4$ a numeratore e raccogliendo a fattor comune si ottiene:

$$\frac{K \cdot Y_1 \cdot Y_4}{(Y_1 Y_4 + Y_1 Y_5 + Y_2 Y_4 + Y_2 Y_5 + Y_3 Y_4 + Y_3 Y_5) + Y_4 \cdot Y_5 - K \cdot Y_2 \cdot Y_4} = \frac{V_0}{V_S}$$

$$\frac{K \cdot Y_1 \cdot Y_4}{Y_5 \cdot (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_4 [Y_1 + Y_2 \cdot (1 - K) + Y_3]} = \frac{V_0}{V_S} = A(s) \quad [2]$$

Filtro passa-basso VCVS del secondo ordine

Lo schema circuitale è il seguente:



ponendo nell'eq. [2], $Y_1 = \frac{1}{R_1}$, $Y_2 = sC_1$, $Y_3 = 0$, $Y_4 = \frac{1}{R_2}$, $Y_5 = sC_2$ si perviene alla seguente f.d.t.

$$A(s) = \frac{K \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}{s^2 + s \left(\frac{1}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_1} + \frac{1-K}{R_2 C_2} \right) + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

FILTRI ATTIVI 26_01_03

se $R_1 = R_2 = R$ e $C_1 = C_2 = C$ la f.d.t. risulta:

$$A(s) = \frac{K \frac{1}{R^2 C^2}}{s^2 + s \left(\frac{3-K}{RC} \right) + \frac{1}{R^2 C^2}}$$

pertanto, da un confronto con l'espressione generale di un filtro passa-basso di secondo ordine di pag. 3

$$A(s) = \frac{A_0 \cdot \omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

si ricava:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC};$$

$$A_0 = K = 1 + \frac{R_B}{R_A};$$

$$2\xi = \frac{1}{Q} = 3 - K = 3 - A_0$$

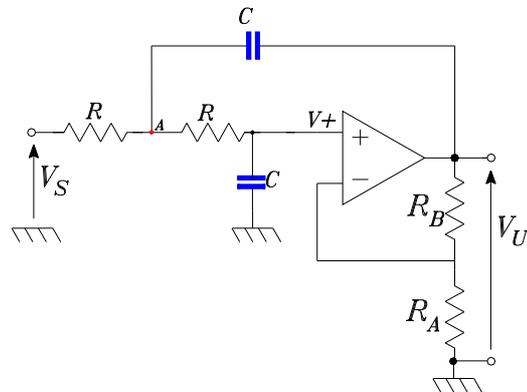
Si evidenzia il fatto che si può variare ξ intervenendo su R_A o R_B e senza alterare il valore di ω_0

Esercizio:

Si progetti un filtro passa-basso VCVS del secondo ordine, a componenti uguali, con tecnica di approssimazione di Butterworth con $f_H = 4.5$ kHz, e con guadagno in banda passante di 12 dB.

Soluzione:

il circuito è il seguente:



il guadagno in banda passante è A_0 :

$$20 \log_{10}(A_0) = 12 \text{ dB}$$

da cui ricavo:

$$A_0 = 10^{\frac{12}{20}} \cong 4$$

è richiesta la tecnica di approssimazione di Butterworth, pertanto mi prelevo il polinomio di ordine 2 dalla tabella di pag. 4 →

$$s^2 + 1.414s + 1$$

$$2\xi = 1.414$$

da cui ricavo $\xi = 1.414 / 2 = 0.707$ in tal modo ho fissato ξ , ma il guadagno in banda passante è A_0 è legato a ξ dalla seguente espressione: $2\xi = 3 - A_0$, da cui ricavo A_0 :

$$A_0 = 3 - 2\xi = 3 - 2 \cdot 0.707 = 1.586 \neq 4$$

pertanto si giunge alla conclusione che non è possibile ottenere un filtro a componenti uguali con $A_0 = 12$ dB.

FILTRI ATTIVI 26_01_03

Supponendo di accettare il guadagno $A_0=1.586$ si procedeva a dimensionare la R_A e R_B , ricordando

che $A_0 = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) = 1.586$, a cui

$$\frac{R_B}{R_A} = 0.586 \quad \text{e quindi} \quad R_B = 0.586 R_A$$

impongo $R_A=5.6 \text{ k}\Omega$ e ricavo $R_B = 0.586 \cdot 5.6 = 3.3 \text{ k}\Omega$

mi rimane da dimensionare la R e C:

la frequenza è legata a R e C tramite l'espressione $\omega_0 = \frac{1}{RC}$;

ma $\omega_0=2\pi f= 2*3.14* 4500=28260 \text{ rad/sec}$, sostituendo:

$$28260 = \frac{1}{RC};$$

mi ricavo R:

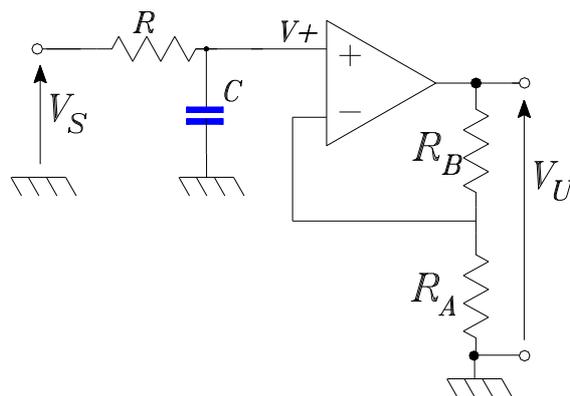
$$R = \frac{1}{28260 \cdot C}$$

e imponendo $C=10 \text{ nF}$ ottengo il valore di R

$$R = \frac{1}{28260 \cdot 10 \cdot 10^{-9}} = 3538 \Omega$$

Filtro del 1° ordine

La cella del 1° ordine può essere disposta in cascata a quella del 2° ordine per realizzare filtri di ordine dispari. Il circuito che segue è sostanzialmente un filtro passa-basso R-C seguito da un amplificatore non invertente, il quale può essere ricavato dalla configurazione generale dei filtri VCVS ponendo $Y_4=1/R$, $Y_5=sC$, $Y_2=Y_3=0$ e $Y_1=\infty$:



$$A(s) = \frac{K}{1 + s \cdot R \cdot C}$$

confrontando questa equazione con la prima della tabella di pag. 3 →

FILTRI ATTIVI 26_01_03

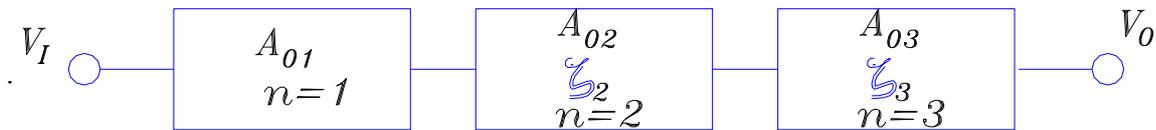
$$\frac{A_o}{\omega_o} = \frac{A_0 \cdot \omega_o}{s + \omega_o}$$

si ottiene:

$$\omega_o = \frac{1}{RC};$$

$$A_0 = K = 1 + \frac{R_B}{R_A};$$

Per realizzare un filtro di ordine 5, si pongono in cascata 2 celle di ordine 2 e uno di ordine 1,

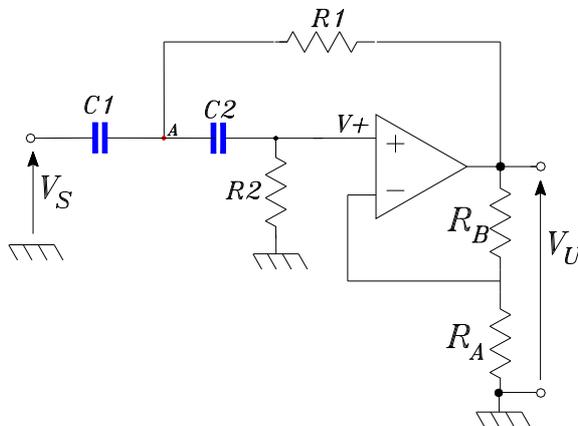


Il guadagno complessivo risulta:

$$A_{TOT} = A_{01} \times A_{02} \times A_{03}$$

Filtro passa-alto VCVS del 2° ordine

Lo schema circuitale è il seguente:



ponendo nell'eq. [2], $\frac{K \cdot Y_1 \cdot Y_4}{Y_5 \cdot (Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) + Y_4 [Y_1 + Y_2 \cdot (1 - K) + Y_3]} = \frac{V_o}{V_s} = A(s)$:

$Y_1 = sC_1, Y_2 = \frac{1}{R_1}, Y_3 = 0, Y_4 = sC_2, Y_5 = \frac{1}{R_2}$, si perviene alla seguente f.d.t.

$$A(s) = \frac{Ks^2}{s^2 + s \left(\frac{1}{R_2C_2} + \frac{1}{R_2C_1} + \frac{1-K}{R_1C_1} \right) + \frac{1}{R_1R_2C_1C_2}}$$

adottando la soluzione a componenti uguali: $R_1 = R_2 = R$ e $C_1 = C_2 = C$ la f.d.t. risulta:

FILTRI ATTIVI 26_01_03

$$A(s) = \frac{Ks^2}{s^2 + s\left(\frac{3-K}{RC}\right) + \frac{1}{R^2C^2}}$$

pertanto, da un confronto con l'espressione generale di un filtro passa-alto di 2° ordine di pag. 3

$$A(s) = \frac{A_0 \cdot s^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}$$

si ricava:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC};$$

$$A_0 = K = 1 + \frac{R_B}{R_A};$$

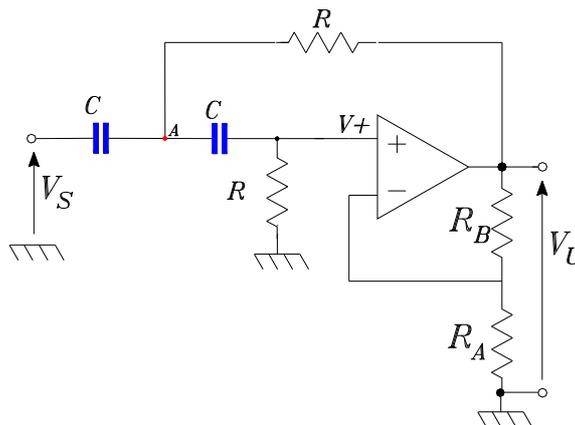
$$2\xi = \frac{1}{Q} = 3 - K = 3 - A_0$$

esempio:

Si progetti un filtro passa- alto del 2° ordine di tipo VCVS a componenti uguali , alla Butterworth, che abbia frequenza di taglio inferiore pari a 200 Hz.

Soluzione:

il circuito sarà:



La f.d.t.:

$$A(s) = \frac{Ks^2}{s^2 + s\left(\frac{3-K}{RC}\right) + \frac{1}{R^2C^2}}$$

da cui:

$$\omega_0 = \frac{1}{RC};$$

$$A_0 = K = 1 + \frac{R_B}{R_A};$$

$$2\xi = \frac{1}{Q} = 3 - K = 3 - A_0$$

pertanto si ricava l'espressione si A_0 :

$$A_0 = 3 - 2\xi$$

FILTRI ATTIVI 26_01_03

è richiesta la tecnica di approssimazione di Butterworth, pertanto mi prelevo il polinomio di ordine 2 dalla tabella di pag. 4→

$$s^2 + 1.414s + 1$$

$$2\xi = 1.414$$

$$A_0 = 3 - 2\xi = 3 - 1.414 = 1.586$$

si procede a dimensionare la R_A e R_B , ricordando che $A_0 = \left(1 + \frac{R_B}{R_A}\right) = 1.586$, da cui

$$\frac{R_B}{R_A} = 0.586 \quad \text{e quindi} \quad R_B = 0.586 R_A$$

impongo $R_A = 5.6 \text{ k}\Omega$ e ricavo $R_B = 0.586 \cdot 5.6 = 3.3 \text{ k}\Omega$

Mi rimane da dimensionare la R e C:

ricordando che $\omega_0 = \frac{1}{RC} = 2\pi f_L$, e sapendo che $f_L = 200 \text{ Hz}$, impongo $C = 33 \text{ nF}$ e mi ricavo R da:

$$R = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f_L \cdot C} = \frac{1}{6.28 \cdot 200 \cdot 33 \cdot 10^{-9}} = 24126 [\Omega]$$
